

ПРОЕКТИРАНЕ И ЧИСЛЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА ЦИФРОВ АДАПТИВЕН СТАБИЛИЗИРАЩ КОНТРОЛЕР НА ОБЪРНАТО МАХАЛО

DESIGN AND NUMERICAL STUDY OF A DISCRETE-TIME ADAPTIVE STABILIZER FOR AN INVERTED PENDULUM

С. Станчев¹, Е. Reithmeier², Н. Христов³

¹ *Институт по управление и системни изследвания, Българска академия на науките, П.К. 79, София 1113, E-mail: stanchev@icsr.bas.bg, stefstanchev@yahoo.com*

² *Institute of Measurement and Control, University of Hannover, Nienburger St. 17, D-30167, Hannover, Germany*

³ *Катедра системи и управление, Технически университет София, София 1756, България*

Abstract: In the present paper the problem of discrete-time stabilization of a 2D inverted pendulum is considered. First, a classical controller is designed with one step-ahead prediction. On this basis, an adaptive controller is synthesized. The stabilizing properties of the synthesized controllers and the elimination of the nonminimum-phase character of the plant model caused by discretization are studied. In comparison with the existing results, the numerical simulations show also that it is possible to use a bigger sample interval. It is also shown that the adaptive controller, in contrast to the classical one, practically damps the oscillations of the input variable. This is significant for the robustness properties of the derived controllers.

Keywords: classical stabilization, adaptive stabilization, classical and adaptive stabilizing controller design, stability analysis, simulation studies

1. УВОД

В статията се разглежда актуалният проблем за стабилизиране на обърнато махало с две степени на свобода, около вертикалната позиция. Опорната точка е на подвижен плот, като стабилизацията се осъществява посредством управлението на плота чрез два изпълнителни механизма, разположени по координатните оси на хоризонталната равнина. За целта първо е проектиран стабилизиращ конвенционален контролер и на тази основа е синтезиран адаптивен контролер. Изследванията, за разлика от предишната работа [1], са в дискретната област. В [1] е направен също и кратък обзор на известни резултати, свързани със стабилизирането на подобни обекти. Проектирането на новия контролер преследва няколко цели: стабилизиране на обекта; отстраняване на неминимално-фазовата част, внесена при дискретизацията; изследване на възможността за използване на сравнително голям интервал на дискретизация, в сравнение с използваните от други автори; както и осигуряване на задоволително качество на преходните процеси, при условие че изходните величини на изпълнителните механизми са в техния номинален диапазон.

2. ПОСТАНОВКА НА ПРОБЛЕМА

Да резюмираме описанието на махалото, дадено в [1]. Апаратурата е с две входни въздействия, u_1 и u_2 , а положението на махалото се определя чрез измерване на два ъгъла, y_1 и y_2 . Моделът в непрекъснат вид, описващ движението на махалото, има вида [1]

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{Ke^{-\tau s}}{s^2 + a_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \frac{s}{s^2 + a_2} \begin{bmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

където с $K = 1/\Theta$ е означено усилването по главните канали, $a_2 = \omega_n^2 = -g/\Theta$ е свободният коефициент в полинома на знаменателя, ω_n е собствената честота на махалото, $K_{12} = -\alpha\omega_0/\Theta$ и $K_{21} = \omega_0/\Theta$ са коефициентите на усилване на кръстосаните (купиращите) канали, ω_0 е векторът на спина, а α е малък коефициент, определящ се от конструктивните данни на махалото. С Θ е означен инерционният момент на махалото, а g е земното ускорение. Поради визуалното определяне на положението на махалото, в системата се внася времезакъснение, означено с τ . Тъй като в момента на пресмятане на входните величини разполагаме с изходните величини, стойностите на времезакъсненията по главните канали се приемат за равни. От физическа гледна точка е ясно, че по взаимно свързаните канали времезакъснения не съществуват, както е и отразено в (1).

С помощта на z -трансформацията, приложена за (1), с използване на фиксатор от нулев ред, получаваме дискретния модел

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = P_1(q^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + P_2(q^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & K_{12}(k) \\ K_{21}(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

където с q сме означили оператора на изместване. Отделните предавателни функции са дадени с изразите по-долу. За предавателната функция $P_1(q^{-1})$ по правите канали имаме

$$P_1(q^{-1}) = \frac{q^{-1}b_1(1+q^{-1})}{1+a_1q^{-1}+q^{-2}} = \frac{q^{-1}B_1'(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2a)$$

където полиномите в числителя и знаменателя съответно са

$$B_1'(q^{-1}) = b_1(1+q^{-1}) \\ A(z^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} \quad (2b)$$

а техните коефициенти са дадени с изразите

$$b_1 = \frac{K}{a_0} \cosh(T\sqrt{a_0} - 1) \\ a_1 = -2\cosh(T\sqrt{a_0}), \quad a_2 = 1. \quad (2c)$$

Предавателната функция $P_2(q^{-1})$ по взаимно свързващите канали е

$$P_2(q^{-1}) = \frac{q^{-1}b_2(1-q^{-1})}{1+a_1q^{-1}+q^{-2}} = \frac{q^{-1}B_2'(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2d)$$

Полиномът в числителя е

$$B_2'(q^{-1}) = b_2(1-q^{-1}) \quad (2e)$$

където

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} 2\sinh(T\sqrt{a_0}) \quad (2f)$$

а полиномът в знаменателя е същият, както по правите канали. Елементите на куплиращата (времепроменлива) матрица са

$$K_{12} = K_{12}(k) = -\alpha\omega_0(k), \quad K_{21} = K_{21}(k) = \omega_0(k). \quad (2g)$$

Трябва да се отбележи, че в диференциалния модел в пространството на състоянието [1], елементите на взаимно-свързващите матрици могат да бъдат времепроменливи. В модела (1) тези коефициенти са постоянни поради характера на трансформацията на Лаплас. В диференчния модел (2) – (2g) обаче, както е известно от теорията на дискретните системи, можем отново да въведем времепроменливи параметри, при предположение, че тяхното изменение е по-бавно от честотата (скоростта) на дискретизация.

В настоящата работа се използва т. нар. неявен дискретен модел на обекта спрямо времезакъснението, тъй като дискретизирането е реализирано без да се взема под внимание времезакъснението, при предположение, че интервалът на дискретизация е по-голям или равен на времезакъснението. Подобна е идеята, но в пространството на състоянието, напр. в [2].

Както е известно, интервалът на дискретизация трябва да е около 1/10, 1/15 от времето за достигане на 95% от задаващото въздействие, за да бъде изпълнено условието на теоремата на Шенон. Други известни зависимости водят до аналогични резултати.

Основна цел на настоящата работа е да се отговори на въпроса възможно ли е този линеен дискретен модел, както и синтезираният на негова основа контролер, да послужат за стабилизиране на махалото. Важна цел на това предварително

изследване е също да се покаже, че необходимите входни въздействия са в рамките на допустимите стойности на изпълнителните механизми. Друга важна цел е да се покаже, че въпреки внесеното голямо времезакъснение при визуалното определяне на изходните величини (поради техническите характеристики на използваната апаратура, в сравнение с друга възможна апаратура), синтезираният контролер работи достатъчно добре.

Тези изследвания в дискретната област ще послужат при бъдещи изследвания с използването на нелинейния модел на махалото. Да отбележим, че от аналоговия (1) и дискретния модел (2) се вижда, че при нулев вектор на спина системата се декуплира. Поради нелинейности от кинематичен характер обаче, при нелинейния модел това не е изпълнено.

3. СИНТЕЗ НА КОНТРОЛЕР С ПРЕДСКАЗВАНЕ ЕДНА СТЬПКА НАПРЕД

3.1 СИНТЕЗ НА КОНВЕНЦИОНАЛЕН КОНТРОЛЕР С ПРЕДСКАЗВАНЕ ЕДНА СТЬПКА НАПРЕД

При синтеза на конвенционален контролер с предсказване една стъпка напред се използва предложеният в [4] подход. Ще дадем кратко изложение на този подход при използване на детерминиран диференчен модел

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B'(q^{-1})u(t) \quad (3)$$

където с d е означено времезакъснението, кратно на интервала на дискретизация, а полиномите са дадени с изразите

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \\ B'(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \quad b_0 \neq 0. \quad (3a)$$

За целите на синтеза да запишем горното уравнение в предикторен вид

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t). \quad (4)$$

Полиномите $\alpha(q^{-1})$ и $\beta(q^{-1})$ се определят чрез сравняването на (3) и (4).

Целта на управлението е грешката на затворената системата да клони към нула:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{t+d} = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{t+d} - y_{t+d}^d) = 0. \quad (5)$$

Замествайки в (5) уравнението (4), получаваме в неявен вид уравнението на контролера

$$\alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) = y^d(t+d). \quad (6)$$

Решавайки (6) относно входното въздействие и замествайки в (2), получаваме уравнението на затворената система

$$(A(q^{-1})\beta(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})\alpha(q^{-1}))y, \\ = q^{-d}B'(q^{-1})y_{t+d}^d = B'(q^{-1})y_t^d \quad (7)$$

Полиномите на контролера се определят от

$$A(q^{-1})\beta(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})\alpha(q^{-1}) = D(q^{-1}) \quad (8)$$

където в дясната страна е предписаният полином, определящ функционирането на затворената система. Поради това, че полиномът $B'(q^{-1})$ е неминималнофазов, избирайки полинома $\beta(q^{-1})$ във вида $\beta(q^{-1}) = F(q^{-1})B'(q^{-1})$, а предписания полином във вида $D(q^{-1}) = D'(q^{-1})B'(q^{-1})$,

поведението на затворената система ще се определя от еталонното уравнение

$$D'(q^{-1})y_t = y_t^d \quad (9)$$

където

$$D'(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}\alpha(q^{-1}).$$

Коефициентите на контролера, т.е. коефициентите на полиномите $F(q^{-1})$ и $\alpha(q^{-1})$, се получават чрез решаване на това полиномиално уравнение. Да отбележим, че ако предписаният полином на затворената система не е факторизиран по този начин, полиномът на числителя на обекта ще фигурира в дясната страна на горното еталонно уравнение. В случая на стабилизация обаче, т.е. при нулеви задаващи въздействия, неопределеността внасяна от неминималнофазовостта не оказва влияние на функционирането на системата. Еталонното уравнение има единствено решение при степен на полиномите $\deg(F(q^{-1})) = d-1$ и $\deg(\alpha(q^{-1})) = n-1$, т.е. предписаният полином трябва да бъде от степен $\deg(D'(q^{-1})) = n+d-1$ [4].

При адаптивния случай, разглеждан по-надолу, за да се избегне делението с адаптивния коефициент пред входното въздействие при пресмятане на управляващото въздействие, уравнението на контролера (6) се преобразува във вида [4]

$$u_t = \alpha'(q^{-1})y_t + \beta'(q^{-1})u_t.$$

Когато в уравнението на контролера фигурира неминималнофазовият полином на числителя на обекта, какъвто е нашият конкретен случай, имаме

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = q^{-1}b_1(1 + q^{-1}) = q^{-1}B'(q^{-1}).$$

За съществуването на решение на полиномиалното уравнение, полиномът F трябва да бъде от нулев ред, $F = f_0$, а полиномът $\alpha(q^{-1})$ – от втори ред, $\alpha(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1q^{-1}$. Предписаният полином $D'(q^{-1})$ трябва да бъде също от втори ред, $D'(q^{-1}) = d_0 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2}$. От решението на полиномиалното уравнение

$$(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2})f_0 + q^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1q^{-1}) = d_0 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} \quad (10)$$

се получава $f_0 = d_0 \equiv 1$, $\alpha_0 = d_1 - a_1$, $\alpha_1 = d_2 - a_2$ и

$$u(t) = -u(t-1) + \frac{1}{b_1}y^d(t+d) - (\alpha'_0 + \alpha'_1q^{-1})y(t) \quad (11)$$

където $\alpha'_0 = \frac{1}{b_1}(d_1 - a_1)$, $\alpha'_1 = \frac{1}{b_1}(d_2 - a_2)$.

3.2 СИНТЕЗ НА АДАПТИВЕН КОНТРОЛЕР

За да получим изразите на адаптивните настройки на контролера, да напишем (11) във векторен вид

$$u(t) = \theta' \phi(t) \quad (12)$$

където $\theta = [1 \ \frac{1}{b_1} \ \alpha'_0 \ \alpha'_1]'$ е векторът на параметрите, а

$\phi(t) = [-u(t-1) \ y^d(t+d) - y(t) - (t-1)]'$ е векторът на данните. Както е известно от теорията на адаптивните системи, при пресмятане на входното въздействие се използва оценка на вектора на параметрите:

$$u(t) = \hat{\theta}' \phi(t). \quad (13)$$

За оценка на параметрите в [4] е предложена рекурсията

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \gamma \frac{\phi_{t-1}}{c + \phi'_{t-1} \phi_{t-1}} \Delta u_{t-1}$$

където $\Delta u_{t-1} = u_{t-1} - \phi'_{t-1} \hat{\theta}_{t-1}$ и $0 < \gamma < 2$. В настоящата работа се използва методът с променлива стъпка [5], при който

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \gamma_{t-1} \Delta u_{t-1} \quad (14)$$

и

$$\gamma_{t-1} = \frac{P_{t-1} \phi_{t-1}}{c + \phi'_{t-1} P_{t-1} \phi_{t-1}}, \quad P_t = \text{diag}\{I - \gamma_{t-1} \phi'_{t-1} P_{t-1} / \beta\}. \quad (15)$$

Тук β е факторът на забравяне на старите данни, а P е ковариационната матрица. Стойността на β се избира в диапазона 0.95 – 0.98, а за начална стойност на ковариационната матрица се взема $P = (20 - 100)I$, където c и I е означено единичната матрица.

Начални стойности на рекурентните зависимости (14), (15) са коефициентите на полиномите на синтезирания в т. 3.1 конвенционален контролер, т.е., при нулева стойност на стъпката γ , адаптивният контролер (13) - (15), функционира като конвенционален.

4. ЧИСЛЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ НА СИНТЕЗИРАНИТЕ КОНТРОЛЕРИ

В нашият конкретен случай параметрите на непрекъснатия модел на махалото са $K = 1/\Theta$ и $a_2 = g/\Theta$. Инерционният момент е $\Theta = 0.0065$, а земното ускорение $g = 9.81$. Както бе отбелязано в раздел 2, при липса на спин линейният модел се декуптира. Поради това се разглежда дискретният модел (2) без втория израз в дясната страна. Полиномите на предавателната функция $P_1(q^{-1})$ за разглеждания случай са

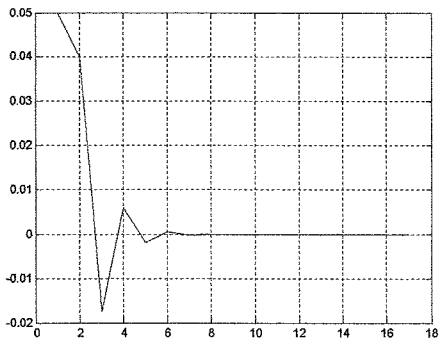
$$B_1'(q^{-1}) = b_1(1 + q^{-1}) = 0.6509(1 + q^{-1})$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$$

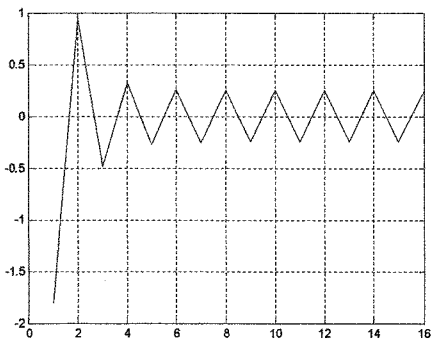
$$= 1 - 14.79q^{-1} + q^{-2}$$

Проведени са числени изследвания със синтезираните конвенционален и адаптивен контролери и линейния дискретен модел (2) - (2g).

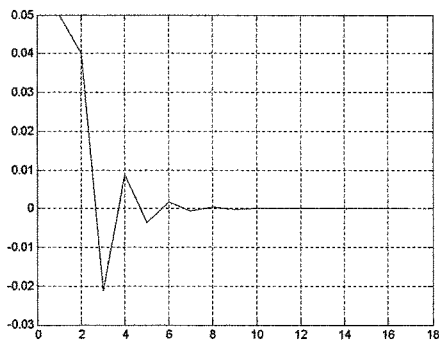
Първата група експерименти са при по-висока начална стойност на входното въздействие, $u(0) = -1.8$, за разлика от следващите експерименти. На фиг. 1 и 2 са дадени изходната и входната величини за конвенционалния контролер. Аналогично, на фиг. 3 и 4 са дадени изходната и входната величини за адаптивния контролер. Вижда се, че при адаптивния контролер колебанията са практически демпфирани, докато при конвенционалния контролер амплитудата на колебанията на входната величина е около 0.25.



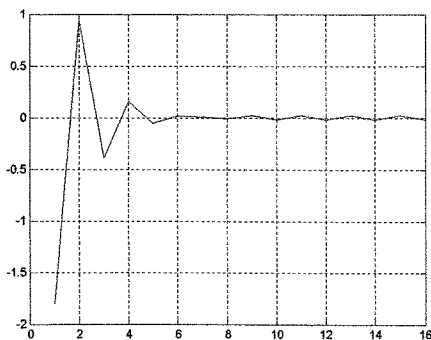
Фиг. 1. Конвенционален контролер, изходна величина



Фиг. 2. Конвенционален контролер, входна величина

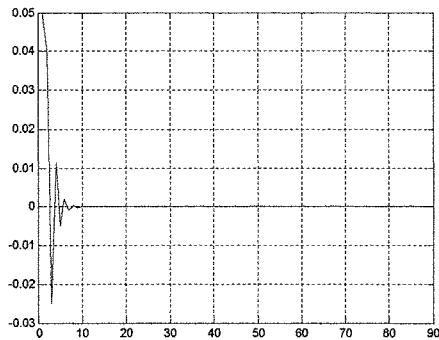


Фиг. 3. Адаптивен контролер, изходна величина

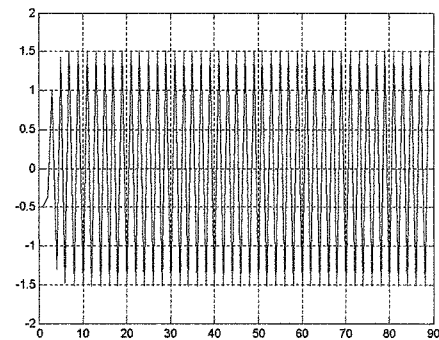


Фиг. 4. Адаптивен контролер, входна величина

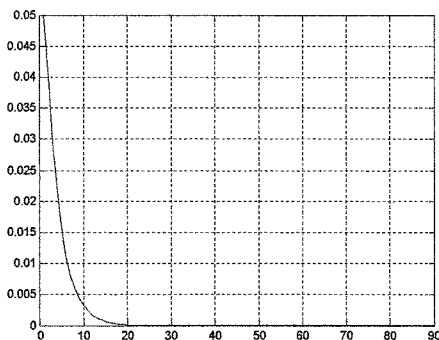
При следващата група изследвания, началната стойност на входното въздействие е значително намалена, $u(0) = -0.5$. Колебанията на входното въздействие при конвенционалния контролер са значително по-големи в сравнение с предишния случай, докато адаптивният контролер и в този случай може да се настрои така, че практически да се избегнат колебанията на входното въздействие. Резултатите са дадени съответно на фиг. 5 и 6 за конвенционалния контролер и на фиг. 7 и 8 за адаптивния контролер.



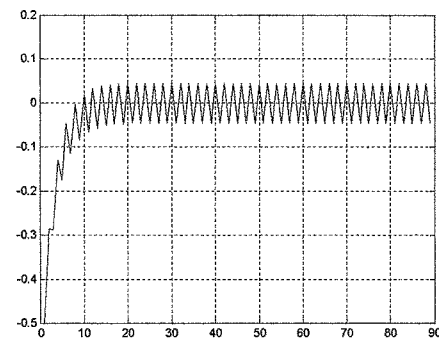
Фиг. 5. Конвенционален контролер, изходна величина



Фиг. 6. Конвенционален контролер, входна величина



Фиг. 7. Адаптивен контролер, изходна величина



Фиг. 8. Адаптивен контролер, входна величина

Последните фигури отново потвърждават значително по-добрата работа на адаптивния вариант на синтезирания контролер с предсказване. От фиг. 6 и 8 се вижда, че амплитудата на колебанията на входната величина при адаптивния контролер е < 0.05 , а при конвенционалния контролер е ≈ 1.5 .

Представените изследвания са проведени с начална стойност на изходната величина $y(0) = 0.05$ или $\approx 2.8^\circ$.

Недостатък на получения адаптивен контролер е необходимостта от пренастройка на стъпката γ при различни

начални условия. Тази настройка обаче се осъществява лесно. При по-големи начални стойности на входните величини, като например при първата група експерименти, адаптивният контролер е слабо чувствителен към изменението на настройката на адаптивния закон.

Проведени са и редица други числени изследвания, които също показват, че амплитудата на колебанията на входната величина при адаптивния контролер е на порядък по-малка в сравнение с класическия случай.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящия доклад е представен синтезът на конвенционален контролер и на адаптивен стабилизиращ контролер за дискретния модел на обърнато махало с две управляващи въздействия и две измервани изходни величини. Показано, че въпреки големият интервал на дискретизация (0.07s), в сравнение с използвания от други автори (около 0.01s), функционирането на системата е в рамките на необходимите изисквания. Синтезираният адаптивен контролер работи с входни въздействия в допустимите диапазони на изпълнителните механизми и макар да има колебания, амплитудата им е на порядък по-малка от тази при конвенционалния контролер.

Това предварително изследване ще улесни до голяма степен осъществяването на реални експерименти с наличната апаратура. Експерименти с нелинейния модел ще изяснят други важни въпроси, свързани с робастността на контролера.

Синтезът на адаптивния контролер може да бъде разширен, като въз основа на резултатите от [6] се осигури функциониране в режим на хлъзгане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stanchev, S. P., E. Reithmeier, N. D. Christov, Pseudo indirect stabilizing adaptive controller design for a linearized model of an inverted pendulum around vertical position, *Межд. Конференция "Автоматика и информатика"*, София, 2002
2. *Systems and Control Encyclopedia. Theory, Technology, Applications*, M. G. Singh, Editor-in Chief, Pergamon Press, 1988
3. *The Control Handbook*, W. S. Levine Ed., CRC Press, 1996
4. Goodwin, G. C., K. S. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction, and Control*, Prentice-Hall, 1984
5. Warwick, K., M. Karny, A. Halouskova (Eds.), *Advanced Methods in Adaptive Control for Industrial Applications*, Springer, 1991
6. Stanchev, S. P., A variant of an (combined) adaptive controller design introducing sliding regime in Lyapunov derivative, *American Control Conference*, 4-6 June 2003, Denver, Colorado